

سلسلة كتب :

الإقْتِياز

في

الديناميك

رياضيات المرحلة الثانية من الثانوية العامة

إعداد :

الأستاذ / علي الدين يحيى

كبير أخصائيين الرياضيات ٠١٠١٧١٠٤٥٧

الفصل السادس

السرعة النسبية والحركة المتغيرة

alyeldeen.com

(١) السرعة النسبية صفحة ٢

(٢) الحركة المتغيرة صفحة ٦

السرعة النسبية والحركة المتغيرة

تعريف متجه السرعة :

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة واتجاهه هو نفس اتجاه حركة الجسيم .

وحدات قياس مقدار السرعة :

$$(1) \text{ سم / ث } \quad (2) \text{ متر / ث } = 100 \text{ سم / ث} \\ (3) 1 \text{ كم / س } = 1 \times \frac{5}{18} \text{ متر / ث} \quad (4) 1 \text{ كم / س } = 1 \times \frac{250}{9} \text{ سم / ث}$$

الحركة المنتظمة :

يقال أن حركة الجسيم منتظمة إذا كان متجه السرعة للجسيم له :
(أولاً) معيار ثابت طوال فترة الحركة . (ثانياً) اتجاه ثابت طوال فترة الحركة .

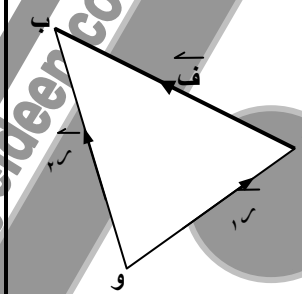
العلاقة بين متجهى الازاحة والسرعة فى الحركة المنتظمة :

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{t} \quad \text{أ} \quad \vec{v} = \frac{\vec{r}}{t}$$

متجه السرعة المتوسطة - متجه السرعة اللحظية :

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_2}{t_2} - \frac{\vec{r}_1}{t_1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

حيث : $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ = متجه الازاحة من 1 إلى 2 $\parallel \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \parallel$



ملاحظة (1) :

إذا كانت الفترة الزمنية $(t_2 - t_1)$ صغيرة جداً وتوسطها اللحظة t فإن متجه السرعة فى هذه الحالة يعرف بمتجه السرعة اللحظية عند اللحظة t ويرمز له بالرمز \vec{v} .

ملاحظة (2) :

إذا تحرك جسيم حركة منتظمة فى فترة محددة فإن متجه السرعة المتوسطة هو نفسه متجه السرعة المنتظمة لها .

السرعة النسبية للجسيم ب بالنسبة للجسيم 1 $\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

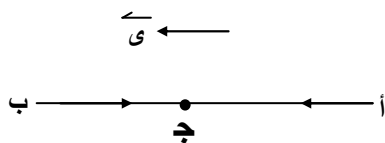
ملاحظة (3) : $\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

مثال (١) : ٢ ب طريق مستقيم طوله ٢٢٥ كم . تحركت سيارة من ٢ ومتجهه نحو ب بسرعة منتظمة مقدارها

٦٠ كم / س وفى نفس اللحظة تحركت سيارة أخرى من ب نحو ٢ بسرعة منتظمة مقدارها ٩٠ كم / س .

أوجد متى وأين يتقابلان ؟

الحل :



نفرض أن السيارتان تتقابلان عند ج بعد زمن قدره ن

ونفرض \vec{v} متجه وحدة فى اتجاه ٢

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ إزاحة السيارة الأولى $\vec{v}_2 = -\vec{v}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ إزاحة السيارة الثانية $\vec{v}_2 = -\vec{v}$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

السيارتان تتقابلان بعد زمن قدره ٩٠ دقيقة عند ج حيث $\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$

حل آخر :

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v} - (-\vec{v}) = 2\vec{v}$

مثال (٢) : تحرك رجل من نقطة ٢ على طريق مستقيم متجهاً للنقطة ج فقطع ٥٠٠ متر بسرعة منتظمة مقدارها

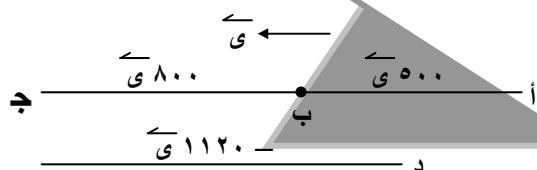
٢٠٠ متر / ث ليصل إلى نقطة أخرى ب ثم تحرك منها فى نفس الاتجاه نحو النقطة ج حيث قطع مسافة

٨٠٠ متر بسرعة منتظمة مقدارها ٦٤٠ متر / ث ثم عاد الرجل بعد ذلك من النقطة ج فى الاتجاه المضاد

فوصل إلى النقطة د بعد أن قطع ١١٢٠ متر بسرعة منتظمة مقدارها ٨٩٦ متر / ث .

عين متجه السرعة المتوسطة لهذا الرجل خلال الرحلة بأكملها وعين معيارها .

الحل :



متجه الازاحة المحصلة $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

زمن الازاحة $\vec{v}_1 = \vec{v}$ $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ $\vec{v}_3 = \vec{v}$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v} - \vec{v} + \vec{v} = \vec{v}$

زمن الازاحة المحصلة $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة بأكملها $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

ومعيارها $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

مثال (٣) : تتحرك سيارة (٢) على طريق مستقيم بسرعة ٦٠ كم / ساعة وتتحرك سيارة (ب) على نفس الطريق بسرعة ٩٠ كم / ساعة . أوجد سرعة السيارة (٢) بالنسبة للسيارة (ب) إذا كان :
(أولاً) السيارتان تتحركان في اتجاه واحد .
(ثانياً) السيارتان تتحركان في اتجاهين متضادين .

الحل :

(أولاً) سرعة ٢ بالنسبة إلى ب $E_p = E_p - E_b = 60 - 90 = -30$ كم / س

أي أن : إذا كانت ٢ متقدمة على ب فإن راكب ب يشعر كأن ٢ تقترب منه بسرعة ٣٠ كم / س
وإذا كانت ٢ متأخرة عن ب فإن راكب ب يشعر كأن ٢ تبتعد عنه بسرعة ٣٠ كم / س

(ثانياً) سرعة ٢ بالنسبة إلى ب $E_p = E_p - E_b = 60 - 90 = -30$ كم / س

أي أن : راكب ب يشعر كأن ٢ تقترب منه أو تبتعد عنه بهذه السرعة .

مثال (٤) : تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٣٠ كم / س . راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت لها وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم / س . فما هي السرعة الفعلية للشاحنة ؟

الحل :

سرعة الشاحنة (ش) بالنسبة إلى السيارة (س) $E_s = E_s - E_s = 0$ كم / س

سرعة الشاحنة (ش) بالنسبة إلى السيارة (س) $E_s = E_s - E_s = 0$ كم / س

السرعة الفعلية للشاحنة $110 = 30 - E_s \Rightarrow E_s = -80$ كم / س

ملاحظة هامة : إذا أطلقت قذيفة من جسم متحرك (٢) على جسم متحرك آخر (ب) فإن :

السرعة الفعلية للقذيفة = سرعة القذاف + سرعة الجسم (٢) بالنسبة إلى الجسم (ب)

مثال (٥) : يتحرك طراد وسفينة على مسار مستقيم واحد بحيث كان كل منهما متجهاً نحو الآخر . راقب الطراد حركة السفينة وعندما كانت على بعد ٨ كم منه بدت له السفينة كما لو كانت متحركة بسرعة ٧٥ كم / س . وعندئذ أطلق الطراد طوربيداً نحو السفينة . فإذا علمت أن محرك الطوربيد يستطيع دفعه بسرعة ١١٧ كم / س . احسب الزمن الذي يمضي من لحظة الإطلاق حتى إصابة السفينة .

الحل :

نفرض سرعة الطراد E_p ، سرعة السفينة E_s ، سرعة الصاروخ E_v

$E_p - E_s = 75$ كم / س $\therefore E_p = 75 + E_s$

سرعة الطوربيد الفعلية = سرعة الطراد بالنسبة للسفينة + سرعة دفع الطوربيد

\therefore سرعة الطوربيد الفعلية $= (117 - 75) + 75 = 117$ كم / س

\therefore معيار سرعة الطوربيد $= 117$ كم / س \therefore زمن وصول الطوربيد $= \frac{8}{117} = \frac{1}{14.625}$ ساعة $= \frac{1}{14.625} \times 60 = 4.1$ دقيقة

مثال (٦) : تتحرك طائرتان بنفس السرعة في مسار مستقيم ، بحيث تتابع أحدهما الأخرى والمسافة بينهما ٨٠٠ متر ، وفي لحظة ما أطلقت الطائرة الخلفية صاروخاً على الطائرة الأمامية فأصابها بعد مرور ثانيتين من إطلاقه . فما هي سرعة دفع الصاروخ ؟

الحل :

نفرض أن سرعة كل من الطائرتين = ع ، وأن سرعة دفع الصاروخ = ع' . ∴ سرعة تحرك الصاروخ = ع + ع'

∴ سرعة الصاروخ بالنسبة للطائرة الأمامية = (ع + ع') - ع = ع'

$$\therefore \text{ف } \frac{800}{2} = \frac{f}{2} = ع' \therefore ع' = 400 \text{ متر / ث}$$

مثال (٧) : مرت شاحنة (٢) طولها ٦ متر وتتحرك بسرعة ٤٥ كم / س بشاحنة أخرى (ب) طولها ٩ متر .

أوجد الزمن اللازم لكي تمر الشاحنة (٢) بالكامل من الشاحنة (ب) إذا كانت الشاحنة (ب) :
(أولاً) ساكنة .

(ثانياً) تتحرك بسرعة ٢٧ كم / س في نفس اتجاه حركة الشاحنة (٢) .

الحل :

(أولاً) ع = ٤٥ ، ع' = ٠

$$\therefore ع' - ع = ٠ - ٤٥ = -٤٥ \text{ كم / س} = \frac{5}{18} \times ٤٥ = -١٢,٥ \text{ متر / ث}$$

ولكي تمر الشاحنة (٢) بالكامل من الشاحنة (ب) يجب أن تقطع مسافة ٦ + ٩ = ١٥ متر بالسرعة ع' - ع

$$\therefore \text{زمن المرور} = \frac{f}{ع' - ع} = \frac{15}{12,5} = 1,2 \text{ ثانية}$$

(ثانياً) ع = ٤٥ ، ع' = ٢٧

$$\therefore ع' - ع = ٢٧ - ٤٥ = -١٨ \text{ كم / س} = \frac{5}{18} \times ١٨ = -٥ \text{ متر / ث}$$

$$\therefore \text{زمن المرور} = \frac{f}{ع' - ع} = \frac{15}{5} = ٣ \text{ ثوان}$$

تمارين (١-١٠)

(١) قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق مستقيم أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفي نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم / س ولما زادت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف وأعدت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة . أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة .

[الجواب : ٦٠ كم / س ، ١٢٠ كم / س]

(٢) تحرك راكب دراجة في اتجاه الشرق بسرعة ٤ م / ث لمدة ٣٠ ثانية وتوقف لمدة ١٠ ثوان ثم عاد فتتحرك في اتجاه الغرب بسرعة ٥ م / ث لمدة ٦٠ ثانية . احسب سرعته المتوسطة خلال حركته الكلية وعين اتجاهها .

[الجواب : ١,٨ م / ث في اتجاه الغرب]

(٣) دراجة بخارية تسير بسرعة ٥٠ كم / س . لاحظ راكبها أن سيارة تسير في الاتجاه المضاد بسرعة ١١٠ كم / س بالنسبة له . أوجد السرعة الفعلية للسيارة .

[الجواب : ٦٠ كم / س]

(بقية التمارين في الصفحة القادمة)

(٤) تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على طريق مستقيم بسرعة ٤٠ كم / ساعة . راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة في الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠ كم / ساعة . فما هي السرعة الفعلية للشاحنة ؟

[الجواب : ٩٠ كم / ساعة]

(٥) تتحرك سيارة ٢ على طريق مستقيم أفقى بسرعة ٧٥ كم / ساعة ، فإذا قابلت سيارة أخرى ب تتحرك بسرعة ٩٠ كم / ساعة في الاتجاه المضاد . أوجد سرعة السيارة ب بالنسبة للسيارة ٢ .

[الجواب : ١٦٥ كم / ساعة]

(٦) قامت سيارة (٢) متحركة على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة في الاتجاه المضاد فوجدتها ١٥٠ كم / س ، ولما خفضت السيارة (٢) سرعتها إلى النصف وأعدت قياس السرعة النسبية للسيارة (ب) وجدتها ١١٠ كم / س ، فما هي السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

[الجواب : $v_p = ٨٠$ كم / ساعة ، $v_b = ٧٠$ كم / ساعة]

(٧) تتحرك سيارتان على طريق مستقيم افقى في اتجاهين متضادين بالسرعتين الثابنتين ٥٠ ، ٧٠ كم / س فإذا كانت المسافة بينهما في لحظة ما ١٢ كيلومتر . احسب الزمن الذى يمضى حتى تتلاقى السيارتين .

[الجواب : ٦ دقائق]

(٨) يسير شخصان في طريق مستقيم أحدهما بسرعة ٦ م / ث والآخر بسرعة ٤ م / ث فإذا كان البعد بينهما ١٠٠ متر فبعد كم دقيقة يلتقيان إذا كانا يتحركان :

(٢) في اتجاه واحد .

(ب) في اتجاهين متضادين .

[الجواب : (٢) يلتقيان بعد ٥٠ ث أو لا يلتقيان أبداً . (ب) يلتقيان بعد ١٠ ث]

الحركة المتغيرة – الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة

Variable motion : الحركة المتغيرة

تعريف : متجه العجلة :

هو المعدل الزمني للتغير في متجه السرعة أو هو التغير في متجه السرعة في وحدة الزمن .

فإذا كان \vec{v}_1 هو متجه السرعة عند اللحظة الزمنية t_1 ، \vec{v}_2 هو متجه السرعة عند اللحظة الزمنية t_2 ،

$$\text{فإن : } \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

وحدات قياس العجلة :

$$\text{وحدات العجلة} = \frac{\text{وحدة السرعة}}{\text{وحدة الزمن}} \quad \left(\frac{\text{سم}}{\text{ث}^2} \text{ أو } \frac{\text{م}}{\text{ث}^2} \text{ أو } \frac{\text{كم}}{\text{س}^2} \right) \quad \text{(ويجب مراعاة الدقة عند التحويل)}$$

Uniform Variable motion : الحركة المنتظمة المتغيرة

دلالة الرموز المستخدمة :

ع . : القياس الجبرى لسرعة الجسيم عند بدء قياس الزمن .

ع : القياس الجبرى لسرعة الجسيم في نهاية الفترة الزمنية t .

ف : القياس الجبرى للإزاحة التى طرأت على الجسيم خلال الفترة الزمنية t .

ج : القياس الجبرى للعجلة .

قوانين الحركة المستقيمة منتظمة التغير :

$\begin{cases} \text{ع} = \text{ع} + \text{ص} \\ \text{ع} = \text{ع} + \text{ص} + \frac{1}{2} \text{ص}^2 \\ \text{ع}^2 = \text{ع}^2 + 2 \text{ص} \end{cases}$ <p>في الحركة الرأسية حيث $\text{ع} = 9.8 \text{ م / ث}^2$ أو $\text{ع} = 980 \text{ سم / ث}^2$</p>	<p>[القانون الأول] : $\text{ع} = \text{ع} + \text{ص}$</p> <p>[القانون الثانى] : $\text{ع} = \text{ع} + \text{ص} + \frac{1}{2} \text{ص}^2$</p> <p>[القانون الثالث] : $\text{ع}^2 = \text{ع}^2 + 2 \text{ص}$</p>
--	---

ملاحظات هامة :

- (١) إذا بدأ الجسم حركته من السكون فإننا نضع $\text{ع} = \text{صفر}$.
- (٢) إذا سكن الجسم فى نهاية فترة فإننا نضع $\text{ع} = \text{صفر}$.
- (٣) $\frac{\text{ع} + \text{ع}}{2} = \text{ع}$
- (٤) السرعة المتوسطة لجسم متحرك بعجلة منتظمة خلال فترة معينة تساوى السرعة عند منتصف هذه الفترة .
- (٥) فى الحركة الرأسية :
- (٦) عند الحركة لأعلى تكون ع سالبة ، وعند الحركة لأسفل تكون ع موجبة
- (ب) زمن الصعود إلى أقصى ارتفاع = زمن الهبوط إلى نقطة القذف
- (ج) مقدار السرعة التى يعود بها الجسم إلى نقطة القذف = مقدار سرعة القذف وفى جهة مضادة لها .

مثال (١) : يتحرك جسم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت . فإذا كانت سرعته فى نهاية الثانية الرابعة ١٨ كم / س وسرعته فى نهاية الثانية الثامنة ٨ متر / ث . فما هى العجلة التى يتحرك بها وما هى سرعته عند بدء قياس الزمن ؟

الحل :

$$\begin{aligned} 18 \text{ كم / س} &= \frac{5}{18} \times 18 = 5 \text{ متر / ث} \\ \therefore \text{ع} &= 5 \\ \therefore \text{ع} &= 8 \\ \therefore \text{ع} &= 12 \end{aligned}$$

من (١) ، (٢) بالطرح : $\therefore \text{ج} = \frac{3}{4} \text{ م / ث}$ ، بالتعويض فى (١) : $\therefore \text{ع} = 2 \text{ م / ث}$

مثال (٢) : بدأ جسم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ١٢ سم / ث وعجلة منتظمة ٤ سم / ث^٢ فى نفس اتجاه سرعته .
(أولاً) احسب المسافة التى يكون الجسم قد قطعها فى الثانية الخامسة فقط .
(ثانياً) احسب المسافة التى يكون الجسم قد قطعها فى الثانية السابعة والسادسة معاً .

الحل :

(أولاً) \therefore السرعة المتوسطة فى الثانية الخامسة = السرعة بعد ٤.٥ ثانية

$$\therefore \text{ع} = \text{ع} + \text{ص} \quad \therefore \text{ع} = 12 + 4.5 \times 4 = 30 \text{ سم / ث}$$

\therefore المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة فقط = $1 \times 30 = 30 \text{ سم}$

(ثانياً) \therefore السرعة المتوسطة خلال الثانية السابعة والسادسة معاً = السرعة بعد ٦ ثوان

$$\therefore \text{ع} = \text{ع} + \text{ص} \quad \therefore \text{ع} = 12 + 6 \times 4 = 36 \text{ سم / ث}$$

\therefore المسافة فى الثانية السابعة والسادسة معاً = $2 \times 36 = 72 \text{ سم}$

مثال (٣) : تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما في اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة ، فإذا قطع في الثانية الخامسة من حركته ٤٨ سم ، وقطع في الثانية التاسعة والعاشر ٨٤ سم . احسب العجلة التي تحرك بها الجسيم والسرعة الابتدائية له .

الحل :

$$\begin{aligned} \therefore \text{السرعة المتوسطة} &= \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \\ \therefore \text{ع} &= \frac{48}{1} = 48 \text{ سم / ث} \text{ بعد زمن قدره } 4,5 \text{ ث} \\ \therefore \text{ع} &= \frac{84}{4} = 21 \text{ سم / ث} \text{ بعد زمن قدره } 9 \text{ ث} \\ \therefore \text{ج} &= \frac{48 - 21}{4,5 - 9} = \frac{27}{-4,5} = -6 \text{ سم / ث}^2 \\ \therefore \text{ع} &= 6 \text{ سم / ث}^2 \text{ ، } 48 = \text{ع} - 6 \times 4,5 \\ \therefore \text{ع} &= 54 \text{ سم / ث}^2 \end{aligned}$$

مثال (٤) : نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٦٠ كم / س إلى ١٥ كم / س بعد أن قطعت مسافة نصف كيلو متر .
(أولاً) أوجد الزمن الذي قطعت فيه السيارة هذه المسافة .
(ثانياً) أوجد المسافة التي تقطعها السيارة بعد ذلك حتى تسكن .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{(أولاً)} \quad \therefore \text{ع} &= \text{ع}^2 + 2 \text{ ج ف} \\ \therefore (15)^2 &= 2 \times \frac{1}{2} \times (60 - 15)^2 \\ \therefore 225 &= 3375 \text{ كم / س}^2 \\ \therefore \text{ع} &= 60 \text{ كم / س}^2 \\ \therefore 15 &= 60 - 3375 \\ \therefore \text{ع} &= 2 \text{ ج ف} \\ \therefore 0 &= 2 \times 3375 - (15)^2 \\ \therefore \text{ف} &= \frac{1}{3} \times 3375 = 1125 \text{ متر} \end{aligned}$$

مثال (٥) : تحرك جسيم من السكون في خط مستقيم فقطع مسافة ١٢٥ متراً بعجلة منتظمة ١٠ متر / ث^٢ ثم انقطعت العجلة وسار الجسيم بالسرعة التي اكتسبها مسافة أخرى قدرها ٤٠٠ متراً . ثم سار بتقصير منتظم ٥ متر / ث^٢ حتى سكن . أوجد الزمن الذي قطع فيه المسافة كلها .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{الحالة الأولى : الجسيم يسير بعجلة منتظمة } 10 \text{ م / ث}^2 : \\ \therefore \text{ع} &= 2 + 0 = 2 \text{ ج ف} \\ \therefore 125 &= 2 \times 10 \times 125 \\ \therefore \text{ع} &= 50 \text{ متر / ث}^2 \\ \therefore 50 &= 2 + 0 = 2 \text{ ج ف} \\ \therefore 125 &= 2 \times 10 \times 125 \\ \therefore \text{ع} &= 50 \text{ متر / ث}^2 \\ \text{الحالة الثانية : الجسيم يسير بسرعة منتظمة } 50 \text{ م / ث} : \\ \therefore \text{ف} &= \frac{400}{50} = 8 \text{ ثوان} \\ \text{الحالة الثالثة : الجسيم يسير بعجلة منتظمة } -5 \text{ م / ث}^2 : \\ \therefore \text{ع} &= 2 + 0 = 2 \text{ ج ف} \\ \therefore 0 &= 2 \times (-5) \times \text{ف} + 50 \times \text{ف} \\ \therefore 0 &= -10 \text{ ف} + 50 \text{ ف} \\ \therefore 40 \text{ ف} &= 0 \\ \therefore \text{ف} &= 0 \\ \therefore \text{الزمن الكلي} &= 8 + 10 + 5 = 23 \text{ ثانية} \end{aligned}$$

مثال (٦) : قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٧٨,٤ م / ث . أوجد :

(أولاً) زمن أقصى ارتفاع .

(ثانياً) أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم .

(ثالثاً) الزمن الذي تستغرقه الجسم من لحظة القذف حتى العودة إلى نفس النقطة

(رابعاً) الزمن الذي يمضي من لحظة القذف حتى تصبح سرعة الجسم مساوية ٣٩,٢ م / ث رأسياً إلى أسفل

الحل :

$$(أولاً) \quad \because \quad \text{ع} = \text{ع} + \text{ع} \quad \text{حيث} \quad \text{ع} = ٧٨,٤ \quad , \quad \text{ع} = ٠ \quad , \quad \text{ع} = -٩,٨ \quad \text{م / ث}^2$$

$$\therefore \quad \text{صفر} = ٧٨,٤ - ٩,٨ \quad \therefore \quad ٨ = \text{ثوان}$$

$$(ثانياً) \quad \because \quad \text{ع}^2 = \text{ع}^2 + ٢ \text{ ج ف} \quad \therefore \quad \text{صفر} = (٧٨,٤)^2 - ٢ \times ٩,٨ \text{ ف} \quad \therefore \quad \text{ف} = ٣١٢,٦ \text{ متر}$$

$$(ثالثاً) \quad \text{الزمن من لحظة القذف إلى لحظة العودة إلى نقطة القذف} = \text{ضعف زمن أقصى ارتفاع} = ٨ \times ٢ = ١٦ \text{ ثانية}$$

$$(رابعاً) \quad \text{عندما} \quad \text{ع} = ٣٩,٢ \text{ متر إلى أسفل أي} \quad \text{ع} = -٣٩,٢$$

$$\because \quad \text{ع} = \text{ع} + \text{ع} \quad \therefore \quad -٣٩,٢ = ٧٨,٤ - ٩,٨ \quad \therefore \quad ١٢ = \text{ثانية}$$

تمارين (١ - ٢)

(١) تتحرك سيارة في خط مستقيم مبتدئة من السكون بعجلة منتظمة $\frac{1}{8}$ م / ث^٢ في نفس اتجاه حركة السيارة . أوجد :

(أولاً) مقدار سرعة السيارة بعد ٣ دقائق بالكم / س .

(ثانياً) الزمن بالثواني الذي تستغرقه السيارة حتى تصبح سرعتها ٣٢,٥ م / ث .

$$[٨١ \text{ كم / س} , ٢٦٠ \text{ ث}]$$

(٢) بدأ جسيم الحركة بسرعة ابتدائية مقدارها ١٢٦ سم / ث وبجعة منتظمة ٩ سم / ث^٢ في وجهة مضادة لاتجاه السرعة

الابتدائية للجسيم . أوجد :

(أولاً) الزمن الذي يستغرقه الجسيم حتى يسكن .

(ثانياً) مقدار واتجاه سرعة الجسيم بعد ٥ ثوان من بدء الحركة .

(ثالثاً) مقدار واتجاه سرعة الجسيم بعد ٢٠ ثانية من بدء الحركة .

$$[١٤ \text{ ث} , ٨١ \text{ سم / ث} \text{ في نفس اتجاه الحركة} , ٥٤ \text{ سم / ث} \text{ عكس اتجاه الحركة أي الجسيم عائد}]$$

(٣) تحرك جسيم بعجلة منتظمة ٤ سم / ث^٢ وكانت سرعته في لحظة ما في نفس اتجاه العجلة مقدارها ٥٠ سم / ث .

احسب المسافة التي قطعها الجسيم في نهاية ٦ ثوان من تلك اللحظة .

$$[٣٧٢ \text{ سم}]$$

(٤) قذفت كرة صغيرة بسرعة ٤٠ سم / ث فتحركت في خط مستقيم حركة تقصيرية بعجلة منتظمة ٨ سم / ث^٢ .

عين موضع الكرة وسرعتها بعد مرور ١٢ ثانية من بدء الحركة .

$$[٩٦ \text{ سم خلف نقطة القذف} , ٥٦ \text{ سم / ث} \text{ في الاتجاه السالب}]$$

(٥) تحركت سيارة بعجلة منتظمة في اتجاه ثابت فزادت سرعتها من ١٨ كم / س إلى ٣٦ كم / س في مدة دقيقة واحدة .

احسب المسافة بالأمتار التي تكون قد قطعتها في نهاية هذه المدة .

$$[\text{الجواب : } ٤٥٠ \text{ متر}]$$

(٦) بدأ جسيم حركته في اتجاه ثابت بسرعة ٢٤ سم / ث وبجعة منتظمة ٨ سم / ث^٢ في نفس اتجاه سرعته . احسب :

(أولاً) المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها في الثانية الرابعة فقط .

(ثانياً) المسافة التي يكون الجسيم قد قطعها في الثانية والخامسة والسادسة فقط .

$$[\text{الجواب : } ٥٢ \text{ سم}]$$

$$[\text{الجواب : } ١٢٨ \text{ سم}]$$

(بقية التمارين بالصفاة القادمة)

(٧) بدأ جسيم الحركة بسرعة ٢ متر / ث وبعجلة منتظمة في نفس اتجاه الحركة . وبعد أن قطع مسافة ٢١ متراً

أصبحت سرعته ١٨ كم / س . أوجد :

(أولاً) عجلة حركة الجسيم (ثانياً) سرعته بعد أن يقطع ١١ متراً أخرى .

$$\left[\frac{1}{4} \text{ م / ث}^2 , 6 \text{ م / ث} \right]$$

(٨) بدأ قطار الحركة من السكون في خط مستقيم من محطة ٢ بعجلة منتظمة ٤٨ كم / ساعة / دقيقة مسافة ٩٠٠ متر ثم سار

بسرعة منتظمة لمدة ٦ دقائق وبعدها سار بتقصير منتظم حتى وقف في محطة ثانية ب بعد ١٠ دقائق من تركه ٢ .

أوجد المسافة بين المحطتين ٢ ، ب .

$$[9,6 \text{ كم}]$$

(٩) سقط حجر صغير (ع . = صفر) رأسياً إلى أسفل من قمة برج ارتقاؤه عن سطح الأرض ١٢٢,٥ متراً . بعد كم ثانية يصل الحجر

إلى الأرض ؟

$$[5 \text{ ثوان}]$$

(١٠) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٤٩ م / ث . أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التي وصل إليها .

$$[5 \text{ ثوان} , 122,5 \text{ متر}]$$

(١١) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ م / ث . احسب سرعة الجسيم عندما يكون على ارتفاع ١٤,٧ متراً عن نقطة القذف .

وفسر وجود جوابين .

$$[9,8 \text{ متر مرة وهو صاعد ومرة وهوهابط}]$$

إذا واجهت مخاوفك
لن يعد عندك ما يخيفك

الفصل السابع

تفاضل الدوال المتجهة

alyeldeeen.com

تفاضل الدوال المتجهة

بفرض $\vec{r}(t)$ دالة متجهة حيث \vec{r} دالة موضع لجسيم متحرك في خط مستقيم وكانت \vec{f} ، \vec{e} ، \vec{g} هي متجهات الازاحة والسرعة والعجلة على الترتيب ، فإن :

$$(1) \quad \vec{f} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2) \quad \vec{e} = \frac{d\vec{f}}{dt} \quad (3) \quad \vec{g} = \frac{d\vec{e}}{dt}$$

$$\text{ملاحظة : القياس الجبري لمشتقة السرعة والعجلة : (1) } \quad \vec{e} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (2) \quad \vec{g} = \frac{d\vec{e}}{dt}$$

ملاحظة هامة :

- (1) تكون الحركة متسارعة إذا كان : $\vec{e} \times \vec{g} = \text{عدد موجب}$.
- (2) تكون الحركة تقصيرية إذا كان : $\vec{e} \times \vec{g} = \text{عدد سالب}$.

مثال (1) : إذا كان \vec{r} متجه وحدة ثابت . عين متجهات السرعة والعجلة للجسيمات التي متجهات الموضع لها كما يلي واستنتج منها حركة كل منها من حيث كونها منتظمة أو منتظمة التغير أو متغيرة :

$$\text{(أولاً) } \vec{r} = (3-2t) \vec{u}$$

$$\text{(ثانياً) } \vec{r} = (1-t^2) \vec{u}$$

$$\text{(ثالثاً) } \vec{r} = (t^3 - 3t + 9) \vec{u}$$

الحل :

$$\text{(أولاً) } \vec{e} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2 \vec{u} \quad \vec{g} = \frac{d\vec{e}}{dt} = 0 \quad \therefore \text{ متجه العجلة} = 0 \quad \therefore \text{ الحركة منتظمة .}$$

$$\text{(ثانياً) } \vec{e} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2t \vec{u} \quad \vec{g} = \frac{d\vec{e}}{dt} = -2 \vec{u} \quad \therefore \text{ متجه العجلة} = -2 \vec{u} \quad \therefore \text{ الحركة منتظمة التغير .}$$

$$\text{(ثالثاً) } \vec{e} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2 - 3) \vec{u} \quad \vec{g} = \frac{d\vec{e}}{dt} = 6t \vec{u} \quad \therefore \text{ متجه العجلة يتغير بتغير } t$$

الاجسيم يتحرك بعجلة منتظمة معيارها 2 .

مثال (2) : يتعين القياس الجبري لمتج موضع جسيم متحرك في خط مستقيم من العلاقة $\vec{r} = 367,5 - 49t + 4,9t^2$ ن

أوجد القياسات الجبرية لكل من متجهات الازاحة والسرعة والعجلة عند أي لحظة ومنها أوجد :

(أولاً) متى تنعدم كل من متجهات الموضع والازاحة والسرعة ؟

(ثانياً) القياس الجبري لمتجه موضع الجسيم عندما تنعدم السرعة .

(ثالثاً) متى يكون القياس الجبري لسرعة الجسيم = -29,4 .

(رابعاً) الفترة الزمنية التي تكون فيها الحركة تقصيرية وتلك التي تكون فيها متسارعة .

(خامساً) المسافة التي تحركها الجسيم خلال 5 وحدات زمنية من بداية الحركة .

الحل :

$$\vec{r} = 367,5 - 49t + 4,9t^2 \quad \therefore \vec{f} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -49 + 9,8t \quad \therefore \vec{e} = \frac{d\vec{f}}{dt} = 9,8$$

$$\vec{e} = 9,8 \quad \therefore \vec{f} = -49 + 9,8t = 0 \quad \therefore t = 5 \quad \therefore \vec{r} = 367,5 - 49(5) + 4,9(5)^2 = -29,4$$

$$\vec{e} = -29,4 \quad \therefore -49 + 9,8t = -29,4 \quad \therefore t = 2 \quad \therefore \vec{r} = 367,5 - 49(2) + 4,9(2)^2 = 29,4$$

∴ ن^٢ - ١٠ - √ = ٧٥ = ٠ ومنها √ = ١٥ والآخر مرفوض

وبقسمة الطرفين على ٤,٩ -

$$\therefore ٤٩ - \sqrt{٤,٩} = ٠$$

وينعدم متجه الازاحة عندما ف = ٠

$$\therefore ١٠ = \sqrt{٠}, ٠ = \sqrt{١٠}$$

$$\therefore ٤,٩ = \sqrt{(١٠ - \sqrt{١٠})}$$

$$\therefore ٥ = \sqrt{٥}$$

$$\therefore ٤٩ - \sqrt{٩,٨} = ٠$$

وينعدم متجه السرعة عندما ع = ٠

(ثانياً) بالتعويض عن √ = ٥ في ر

$$\therefore \text{القياس الجبرى لمتجه الموضع عندئذ } ٣٦٧,٥ = ٤٩ \times ٥ - ٤,٩ \times ٢٥ = ٤٩٠$$

$$\therefore \sqrt{٨} = ٨$$

$$\therefore ٢٩,٤ - \sqrt{٩,٨} = ٠$$

(ثالثاً) بوضع ع = -٢٩,٤

(رابعاً) الحركة تكون تقصيرية عندما يكون ع × ج > ٠

$$\text{أى عندما } \sqrt{٥,٠} \geq ٥$$

$$\therefore ٩,٨ - (٤٩ - \sqrt{٩,٨}) > ٠ \text{ أى } \sqrt{٥} > ٥$$

والحركة تكون متسارعة عندما يكون ع × ج < ٠

$$\text{أى عندما } \sqrt{٥,٠} \geq \infty$$

$$\therefore ٩,٨ - (٤٩ - \sqrt{٩,٨}) < ٠ \text{ أى } \sqrt{٥} < ٥$$

(خامساً) بالتعويض عن √ = ٥ في ف

$$\therefore \text{الازاحة التى تحركها الجسم خلال } ٥ \text{ وحدات زمنية } = ٤٩ \times ٥ - ٤,٩ \times ٢٥ = ١٢٢,٥$$

∴ الحركة لم يتغير نوعها خلال هذه الفترة ∴ الازاحة = المسافة = ١٢٢,٥ وحدة مسافة .

تمارين (٢ - ١)

(١) يعطى متجه موضع جسم ر كدالة فى الزمن √ من العلاقة : $\overline{r} = \overline{r}^٢ + \overline{r}٥ + \overline{r}٣$ حيث \overline{r} متجه وحدة ثابت .

أوجد كلا من متجهات الازاحة والسرعة والعجلة لهذا الجسم فى أى لحظة .

[الجواب : (ن^٢ + √٥) \overline{r} ، (٢ + √٥) \overline{r} ، ٢ \overline{r}]

(٢) تحرك جسم كتلته ٤ كجم فى خط مستقيم فإذا كان متجه إزاحته كدالة فى الزمن يعطى بالعلاقة : $\overline{r} = \overline{r}٣ + \overline{r}٥$ حيث \overline{r} متجه وحدة ثابت ، ف بالمتر ، √ بالثانية . احسب طاقة حركة الجسم بعد ٣ ثوان من بدء الحركة بالجول .

(إرشاد : طاقة الحركة (ط) = $\frac{١}{٢} \times \|\overline{v}\|^٢$)

[الجواب : ط = ١٦٢ جول]

(٣) يتحرك جسم كتلته ٤ كجم فى خط مستقيم أفقى . فإذا كان متجه إزاحته كدالة فى الزمن يعطى من العلاقة :

$$\overline{r} = \overline{r}٢ + \overline{r}٣ + \overline{r}٤$$

فأوجد كمية حركة الجسم عند √ = ٢ ثانية .

(إرشاد : كمية الحركة (م) = م × ك × ع)

[الجواب : م = ٣٢ كجم . م / ث]

(٤) يعطى متجه موضع جسيم ر كدالة فى الزمن √ من العلاقة : $\overline{r} = \overline{r}٢ + \overline{r}٢$ حيث \overline{r} متجه وحدة ثابت

أوجد متجهى سرعة وعجلة الجسيم عند أى لحظة زمنية √ .

[الجواب : ٢(٢ + √) \overline{r} ، ٢ \overline{r}]

(بقية التمارين بالصفحة القادمة)

(٥) يتحرك جسم في خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة تعمل في اتجاه الحركة مقدارها ٤٠ نيوتن . فإذا كان متجه إزاحة الجسم يعطى بالعلاقة : $\vec{r} = (\frac{1}{3}v^2 + 4v)\vec{i}$ حيث \vec{i} متجه وحدة مواز للخط المستقيم ، ف مقاسة بالمتر ، v مقاسة بالثواني فأوجد :

- (١) متجه السرعة الابتدائية للجسم .
- (٢) متجه عجلة الحركة بعد ٥ ثوان .
- (٣) الشغل الذى تبذله هذه القوة بالجول خلال الثوانى الثلاث الأولى من بدء الحركة .

(إرشاد : الشغل المبذول $W = v \times F$)

[الجواب : ع. $\vec{r} = 4\vec{i}$ ، ج. $\vec{r} = 10\vec{i}$ ، ش. $840 = 840$ جول]

(٦) يعطى متجه موضع جسم \vec{r} كدالة في الزمن v من العلاقة : $\vec{r} = (v^3 - 6v^2 + 12v + 9)\vec{i}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت أوجد متجهى الازاحة والسرعة للجسم عند أى لحظة زمنية v . ومتى ينعدم متجه السرعة ؟

[الجواب : $(v^3 + 6v^2 + 12v + 9)\vec{i}$ ، $(3v^2 + 12v + 12)\vec{i}$ ، 2 وحدة زمن]

(٧) يعطى متجه موضع جسيم يتحرك في خط مستقيم عند اللحظة v بالعلاقة $\vec{r} = 40v\vec{s} + 30v\vec{v}$ حيث \vec{r} مقيسة بالسنتيمتر ، v بالثانية . أوجد كتلة الجسم إذا علم أن طاقة حركته تساوى ٢ جول .

(إرشاد : $2 \text{ جول} = 2 \times 10^7 \text{ إرج}$ حيث الكتلة بالجرام ، المسافة بالسم ، الزمن بالثانية) [الجواب : ١٦ كجم]

(٨) يعطى متجه إزاحة جسم كتلته ١٠٠ جرام كدالة في الزمن v بالعلاقة $\vec{r} = (4v^2 - 2v)\vec{i}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت ، ف مقاسة بالسنتيمتر ، v بالثانية . أوجد :

- (أولاً) متجه القوة المؤثرة على الجسم .
- (ثانياً) الشغل الذى بذلته هذه القوة خلال الثوانى الأربعة الأولى من الحركة .

[الجواب : - $200\vec{i}$ ، صفر]

(٩) يتحرك جسم كتلته جرام واحد وكان متجه الموضع له \vec{r} عند أى لحظة v يتعين بالعلاقة : $\vec{r} = (8 + 6v - \frac{3}{4}v^2)\vec{s}$ حيث \vec{r} مقاسة بالسنتيمتر ، v بالثانية ، فأوجد كلاً مما يأتى :

- (١) متى تكون الحركة متسارعة ؟ ومتى تكون تقصيرية ؟
- (٢) إذا كانت القوة المؤثرة على الجسم هي $\vec{F} = 2\vec{s} + 3\vec{v}$ فعين كلا من p ، b حيث q مقاسة بالداين .

[الجواب : متسارعة عندما $v < 2$ ، تقصيرية عندما $v > 2$ ، $0 = p$ ، $b = 3$]

(١٠) يتحرك جسيم في خط مستقيم وكان متجه موضعه $\vec{r} = (v^3 - 3v^2 - 5v)\vec{i}$ حيث \vec{i} متجه وحدة في اتجاه حركة الجسيم ، r مقيسة بالمتر ، v بالثانية . أوجد :

- أولاً : مقدار العجلة عندما تنعدم السرعة .
- ثانياً : نوع الحركة من حيث التسارع والتقصير عندما $v = 3$ ثوانى .

[الجواب : - 6 م / ث^2 ، 6 م / ث^2 ، الحركة متسارعة]

(بقية التمارين بالصيغة القادمة)

- (١١) جسم كتلته ك = (٢٠ + ٥) كيلو جرام ومتجه موضعه يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (\frac{1}{4}t^2 + 5t - 5)\vec{i} + 3t\vec{j}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت ، r مقاسة بالمتر ، t مقاسة بالثانية . أوجد :
- (أولاً) متجهى السرعة والعجلة للجسم عند أى لحظة معينة t .
- (ثانياً) مقدار القوة المؤثرة على الجسم عند $t = 10$ ثانية . (إرشاد : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ، $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$)

[الجواب : $(10 + 5)\vec{i}$ ، $3\vec{j}$ ، ٤٧ نيوتن]

- (١٢) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم تحت تأثير القوتين : $\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ، $\vec{F}_2 = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ حيث القوى مقاسة بالنيوتن ، فإذا كان متجه إزاحة الجسم يعطى كدالة فى الزمن t من العلاقة : $\vec{r} = (\frac{1}{4}t^2 + 3t)\vec{i} + (\frac{1}{4}t^2 - 3t)\vec{j}$ حيث t مقيسة بالمتر ، t بالثانية .
- عين قيمة الثابت P ثم أوجد $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (ق ⊙ ف) عندما $t = 4$.
- (إرشاد : احسب $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ثم $\vec{F} = m\vec{a}$)

[الجواب : $P = -1$ ، ١٦ نيوتن . متر / ث]

- (١٣) يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه \vec{r} يعطى كعلاقة فى الزمن t بالعلاقة $\vec{r} = (2t^3 - 3t + 3)\vec{i} + 3t\vec{j}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت . عين كل من متجهى السرعة والعجلة ، وبين متى تكون الحركة تقصيرية ومتى تكون متسارعة ؟
- [الجواب : ع = $(6t^2 - 3)\vec{i} + 3\vec{j}$ ، ج = $12t\vec{i}$ ، تقصيرية عندما $t < \frac{1}{2}$ ، متسارعة عندما $t > \frac{1}{2}$]

- (١٤) يتحرك جسم كتلته واحد كيلو جرام بحيث كان متجه موضعه : $\vec{r} = (4t^2 + 3t + 1)\vec{i} + 3t\vec{j}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت ، t الزمن بالثانية ، r مقاسة بالمتر . فإذا كانت طاقة حركة الجسم عندما $t = 1$ ثانية تساوى ٥٠ جول فأوجد قيمة الثابت P (إرشاد : ط = $\frac{1}{2}mv^2$ عند $t = 1$. ∴ $\frac{1}{2}m(4 + 9 + 9) = 50$. وأكمل)
- [الجواب : ٣ أو ٧]

- (١٥) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم فى خط مستقيم وكان متجه موضعه عند اللحظة t ثانية يتعين من العلاقة :
- $\vec{r} = (5t^2 - 3t + 3)\vec{i} + 3t\vec{j}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت ، r مقاسة بالمتر ، . أوجد عندما $t = 2$ ثانية نوع الحركة من حيث كونها متسارعة أم تقصيرية ، وأوجد عند نفس اللحظة متجه كمية الحركة وطاقة الحركة .
- [الجواب : الحركة تقصيرية ، $\vec{v} = 10\vec{i}$ ، ط = ٢٥ جول]

- (١٦) يتحرك جسم متغير الكتلة فى خط مستقيم وكانت كتلته عند أى لحظة زمنية t تساوى ك = $(4 + t)$ جرام وكان متجه إزاحته يعطى بالعلاقة $\vec{r} = (2t + 3)\vec{i} + 3t\vec{j}$ حيث \vec{i} متجه وحدة ثابت مواز للخط المستقيم ، t الزمن بالثانية ، ف المسافة بالسنتيمتر . أوجد :
- (١) متجه كمية الحركة لهذا الجسم .

(٢) معيار القوة المؤثرة على الجسم عندما $t = 4$

(إرشاد : $\vec{F} = m\vec{a}$ ، $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$)

[الجواب : $\vec{F} = (8 + 10 + 2)\vec{i} + 3\vec{j}$ ، $\vec{F} = (10 + 10)\vec{i} + 3\vec{j}$ ، $t = 4$ دايين]